Knobeln, Spielen, logisch Denken

Christoph Hammer

chjhammer@web.de
www.mathematik.uni-osnabrueck.de/forschung/ag_mathematikdidaktik/hammer_christoph.html
www.mathe-fuer-eltern.de **Hier finden Sie die Folien zu diesem Kurs.**

Gretl-Bauer-Volkshochschule Fürstenfeldbruck, 19.3.2024

Einführung

Übersicht

- Räumliches Vorstellungsvermögen
  - Übungen mit Würfeln
  - Eine Seereise
- Zählen und Beweisen
  - Problem des kleinen Gauß
- Begriffe bilden und handelnd Beweise führen
  - Papierfalten
- Realsituationen verstehen: Modellierung
  - Vom DIN-Format über Spiegel zum radioaktiven Zerfall
- Ein- für allemal – Rechnen mit Variablen: Algebra
  - Terme finden

Räumliches Vorstellungsvermögen

Würfel aus Würfeln

Stellen Sie sich einen Würfel vor, der aus kleinen Würfeln zusammengesetzt ist. Längs einer Kante liegen drei kleine Würfel.

- Wie viele kleine Würfel werden benötigt?
- Wie viele Seitenflächen kleiner Würfel sind außen?
- Wir nehmen den Würfel heraus, der vorne oben in der Mitte liegt. Hat sich dadurch die Oberfläche des Objekts verändert?
- Wie ist das, wenn man einen Eckwürfel entfernt?
- Wie viele Ecken ergeben sich, wenn man eine Ecke gerade abschneidet?

Räumliches Vorstellungsvermögen

Seereise

- Wir befinden uns in Lissabon auf einem seetauglichen Schiff.
- Unser Schiff fährt in westlicher Richtung los und dann nur „geradeaus“.

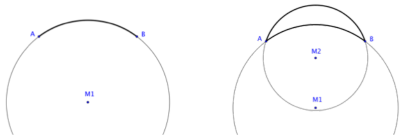
  Es gibt keine Winde und keine Strömungen, das Ruder ist fixiert.

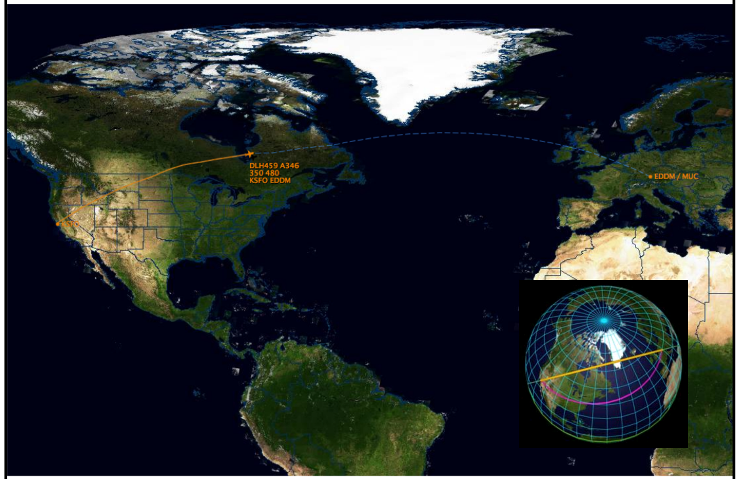
- *Wo kommen wir hin?*

Räumliches Vorstellungsvermögen

Seereise – Erklärung

- „Geradeaus“ bedeutet „kürzeste Verbindung“.
- Auf einer Kugel sind solche Verbindungen Kreisbögen.
- Wie hängt die Bogenlänge mit dem Radius zusammen?





Räumliches Vorstellungsvermögen

Mondsichel

- So sieht der Mond manchmal (19.11.23, 17 Uhr) aus:

- Wo ist die Sonne?

Zählen und Beweisen

Problem des kleinen Gauß

Wie lautet das Ergebnis der Summe der aufeinander folgenden natürlichen Zahlen von 1 bis 100?

- also: 1 + 2 + 3 + ... + 100 = ?
- $\sum_{i=1}^{100} i = 5050$
- Wie kommt man darauf?

Problem des kleinen Gauß

1 + 2 + 3 + ….. + 99 + 100 = S
100 + 99 + 98 + 97 +….. + 1 = S

100 +100 +100+ ….. + 100 + 100 = 2S

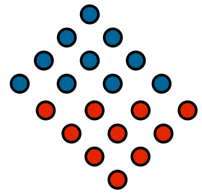
$101 \cdot 100 = 10100$ = 2S
S = 5050

Problem des kleinen Gauß

Machen wir ein Beispiel mit kleinen Zahlen:
1 + 2 + 3 + 4 = 10

$$\sum_{i=1}^{4} i = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$



Mittelsenkrechte im Dreieck

- Sie erhalten Papierdreiecke.
- Falten Sie bitte **eine** Mittelsenkrechte.
- Wie findet man die Mitte?
- Was ist eine Senkrechte? Was ist ein rechter Winkel?

Rechter Winkel – was ist das?

- Zwei Geraden *g* und *h* heißen senkrecht, wenn sich *g* und *h* schneiden und
  - die vier entstehenden Winkelfelder gleich groß (kongruent) sind.

  Oder
  - Nebenwinkel gleich groß (kongruent) sind.

- „Deckungsgleichheit" (=„Kongruenz") – sie liegen aufeinander!
- Folgerung für die Abstandseigenschaft der Mittelsenkrechte.

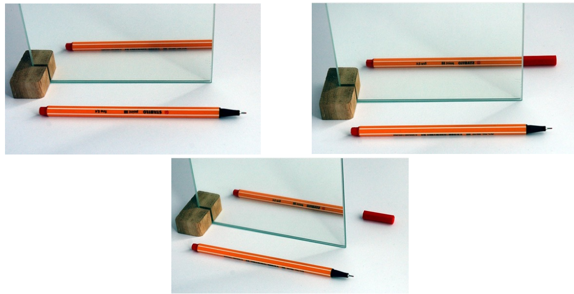
Begriffe bilden

Mittelsenkrechte im Dreieck

- Falten Sie bitte eine **zweite** der drei Mittelsenkrechten und betrachten Sie den Schnittpunkt *S* mit der ersten.
- Was meinen Sie: geht die dritte Mittelsenkrechte auch durch den Punkt *S*?
- Erinnern Sie sich an die Abstandseigenschaft der Mittelsenkrechten?
- *S* ist der Mittelpunkt des „Umkreises".

Realsituationen verstehen

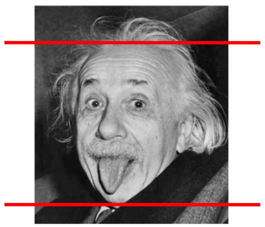
Was zeigt ein Spiegel?



Realsituationen verstehen

Was sieht man im Spiegel?

- Sie erhalten Spiegel und Filzstifte.
- Markieren Sie auf dem Spiegel den Scheitel und das Kinn Ihres Spiegelbilds.

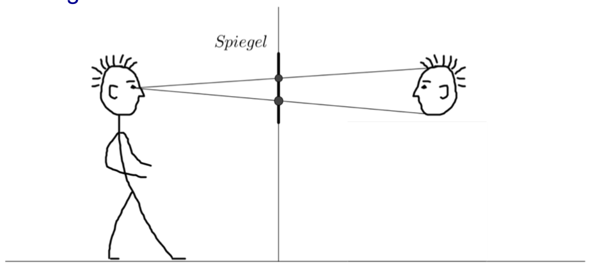


Realsituationen verstehen

Interpretation

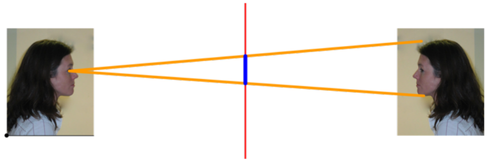
Sind Sie über den Abstand der Markierungen erstaunt?

Erklärung:



Was sieht man im Spiegel?

Wenn man sich in einem an der Wand hängenden Spiegel betrachtet – wie kann man dann den sichtbaren Ausschnitt verändern?

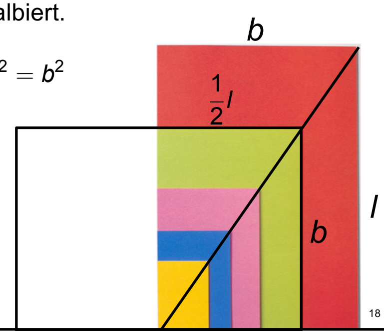


DIN-Format

- Das Verhältnis der langen zur kurzen Seite ist bei allen DIN – Blättern gleich.
- Die Blätter werden halbiert.

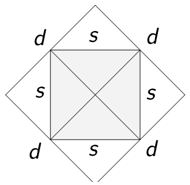
$$\frac{l}{b} = \frac{b}{\frac{1}{2}l} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}l^2 = b^2$$

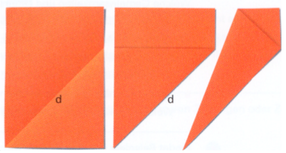
$$\Rightarrow \quad l = \sqrt{2} \cdot b$$



DIN-Format

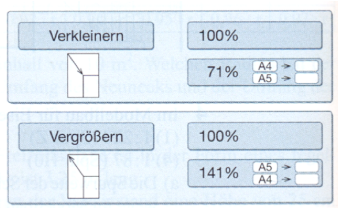
- Das Quadrat über der Diagonale *d* eines Quadrats mit den Seiten *s* hat den doppelten Flächeninhalt:
- $d^2 = 2 \cdot s^2$
- $\Rightarrow \; d = \sqrt{2} \cdot s$





DIN-Format

Wissen Sie jetzt auch, warum auf der Vergrößerungstaste des Kopierers 141% (71%) steht?



$$\sqrt{2} \approx 1{,}414\ldots; \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\ldots$$

Würfeln – Modellbildung

- Nehmen Sie Ihre Würfel und werfen Sie alle 20 Würfel gemeinsam.
- Jeder Würfel, der eine 6 zeigt, scheidet aus.
- Sagen Sie mir, wie viele Würfel dann übrig sind.
- Wir werfen gemeinsam die übrigen Würfel.
- Jeder Würfel, der eine 6 zeigt, scheidet aus.
- Das wiederholen wir acht Mal.

GEOGEBRA

Realsituationen verstehen

Parallele zum radioaktiven Zerfall

- Atomkerne zerfallen zufällig und scheiden dann für weitere Zerfälle aus – wie Würfel, die eine 6 zeigen.
- Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines (beliebigen) Kerns ist ist proportional zur Anzahl der vorhandenen (unzerfallenen) Kerne –

  wie beim Würfeln: hat man n Würfel, dann ist die Wahrscheinlichkeit für eine sechs:

  $$\frac{n}{6}$$
- Halbierung der Anzahl der Würfel – Halbwertszeit