

Eine schöne Aufgabe (nicht aus dem Buch)

Kürzlich erreichte mich die Anfrage, wie wohl folgende Aufgabe zu lösen sei:

Gesucht sind zwei natürliche Zahlen, deren Summe 810 ist und deren Produkt möglichst nahe bei 3000 liegt.

Wollen Sie zuerst selbst überlegen? Dann lesen Sie zunächst nicht weiter, denn hier kommt die Lösung, bei der wieder zu sehen ist, wie nützlich Algebra sein kann.

Wir setzen für die beiden gesuchten Zahlen Variable und schreiben die Bedingungen der Aufgabe damit auf. Der zweite Schritt ist hier auch schon angegeben, nämlich dass man eine Variable in der zweiten Gleichung mithilfe der ersten eliminieren kann:

$$x + y = 810 \Rightarrow y = 810 - x$$

$$x \cdot y = x \cdot (810 - x) = 3000$$

Wir erhalten eine quadratische Gleichung:

$$-x^2 + 810x - 3000 = 0$$

Zur Lösung verwenden wir die Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-810 \pm \sqrt{810^2 - 4 \cdot 3000}}{-2} = \frac{-810 \pm \sqrt{656100 - 12000}}{-2} = \frac{-810 \pm \sqrt{644100}}{-2}$$

Die Wurzel ist irrational, deshalb arbeiten wir mit Näherungswerten weiter:

$$x_{1/2} \approx \frac{-810 \pm 802,56}{-2}$$

$$x_1 \approx \frac{-7,44}{-2} = 3,72$$

$$x_2 \approx \frac{-1612,56}{-2} = 806,28$$

Die Lösungen liegen also in der Nähe von 4 und 806 und das Produkt ist – na ja – nicht weit von 3000 entfernt.

$$4 \cdot 806 = 3224$$