

## Mathe mit Vergnügen

Christoph Hammer

[chhammer@web.de](mailto:chhammer@web.de)

[www.mathematik.uni-osnabrueck.de/forschung/ag\\_mathematikdidaktik/hammer\\_christoph.html](http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/forschung/ag_mathematikdidaktik/hammer_christoph.html)  
[www.mathe-fuer-eltern.de](http://www.mathe-fuer-eltern.de) [Hier finden Sie die Folien zu diesem Kurs.](#)

Gretl-Bauer-Volkshochschule, 17.05.2023

Einführung

## Übersicht

- Räumliches Vorstellungsvermögen
  - Übungen mit Würfeln
- Zählen und Beweisen
  - Problem des kleinen Gauß
- Begriffe bilden und handelnd Beweise führen
  - Papierfalten
- Ein- für allemal – Rechnen mit Variablen: Algebra
  - Terme finden
- Realsituationen verstehen: Modellierung
  - Vom DIN-Format über Spiegel zum radioaktiven Zerfall
- *Optional:* Messen; Strukturieren

Christoph Hammer

3

Räumliches Vorstellungsvermögen

## Würfel aus Würfeln

Stellen Sie sich einen Würfel vor, der aus kleinen Würfeln zusammengesetzt ist. Längs einer Kante liegen drei kleine Würfel.

- Wie viele kleine Würfel werden benötigt?
- Wie viele Seitenflächen kleiner Würfel sind außen?
- Wir nehmen den Würfel heraus, der vorne oben in der Mitte liegt. Hat sich dadurch die Oberfläche des Objekts verändert?
- Wie ist das, wenn man einen Eckwürfel entfernt?
- Wie viele Ecken ergeben sich, wenn man eine Ecke gerade abschneidet?

Christoph Hammer

5

Zählen und Beweisen

## Problem des kleinen Gauß

Wie lautet das Ergebnis der Summe der aufeinander folgenden natürlichen Zahlen von 1 bis 100?

- also:  $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = ?$

- $$\sum_{i=1}^{100} i = 5050$$

- Wie kommt man darauf?

Christoph Hammer

6

Zählen und Beweisen

**Problem des kleinen Gauß**

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = S$$

$$100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 1 = S$$

$$100 + 100 + 100 + \dots + 100 + 100 = 2S$$

$$101 \cdot 100 = 10100 = 2S$$

$$S = 5050$$

Christoph Hammer

7

Zählen und Beweisen

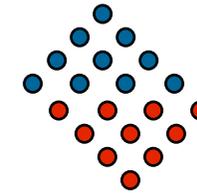
**Problem des kleinen Gauß**

Machen wir ein Beispiel mit kleinen Zahlen:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{i=1}^4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\sum_{i=1}^n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$



Christoph Hammer

8

Begriffe bilden

**Mittelsenkrechte im Dreieck**

- Sie erhalten Papierdreiecke.
- Falten Sie bitte **eine** Mittelsenkrechte.
- Wie findet man die Mitte?
- Was ist eine Senkrechte? Was ist ein rechter Winkel?

Christoph Hammer

11

Begriffe bilden

**Rechter Winkel – was ist das?**

- Zwei Geraden  $g$  und  $h$  heißen senkrecht, wenn sich  $g$  und  $h$  schneiden und
  - die vier entstehenden Winkelfelder gleich groß (kongruent) sind.
 Oder
  - Nebenwinkel gleich groß (kongruent) sind.
- „Deckungsgleichheit“ (= „Kongruenz“) – sie liegen aufeinander!
- Folgerung für die Abstandseigenschaft der Mittelsenkrechte.

Christoph Hammer

12

Begriffe bilden

### Mittelsenkrechte im Dreieck

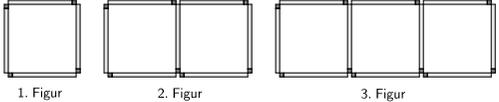
- Falten Sie bitte eine **zweite** der drei Mittelsenkrechten und betrachten Sie den Schnittpunkt S mit der ersten.
- Was meinen Sie: geht die dritte Mittelsenkrechte auch durch den Punkt S?
- Erinnern Sie sich an die Abstandseigenschaft der Mittelsenkrechten?
- S ist der Mittelpunkt des „Umkreises“.

Christoph Hammer 13

Ein- für allemal - Algebra

### Muster erkennen und fortsetzen

- Mit Streichhölzern werden Muster gelegt und fortgesetzt. Es geht um die Frage, wie viele Hölzchen jeweils nötig sind.



|        |   |   |    |   |     |
|--------|---|---|----|---|-----|
| Nummer | 1 | 2 | 3  | 4 | ??? |
| Anzahl | 4 | 7 | 10 |   |     |

- $\text{Anzahl} = 4 + 3 \cdot (n - 1)$  (die „Variable“  $n$  steht für die Nummer)

Christoph Hammer 14

Realsituationen verstehen

### Was zeigt ein Spiegel?

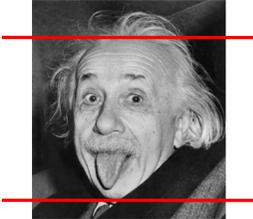


Christoph Hammer 15

Realsituationen verstehen

### Was sieht man im Spiegel?

- Sie erhalten Spiegel und Filzstifte.
- Markieren Sie auf dem Spiegel den Scheitel und das Kinn Ihres Spiegelbilds.



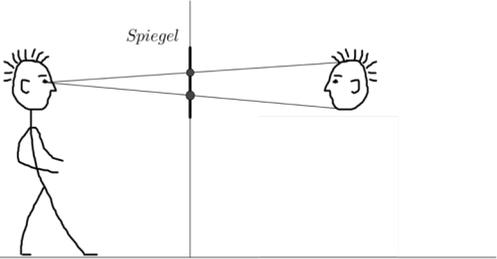
Christoph Hammer 16

Realsituationen verstehen

### Interpretation

Sind Sie über den Abstand der Markierungen erstaunt?

Erklärung:

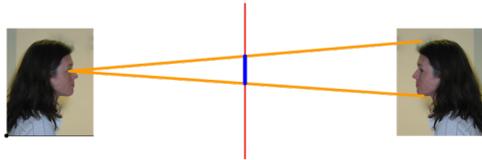


Christoph Hammer 17

Realsituationen verstehen

### Was sieht man im Spiegel?

Wenn man sich in einem an der Wand hängenden Spiegel betrachtet – wie kann man dann den sichtbaren Ausschnitt verändern?



Christoph Hammer 18

Realsituationen verstehen

### DIN-Format

- Wissen Sie, was das Besondere am DIN – Format ist?
- Welches Seitenverhältnis hat ein DIN – Blatt?

$$\frac{l}{b} = \frac{b}{\frac{1}{2}l} \Rightarrow \frac{1}{2}l^2 = b^2$$

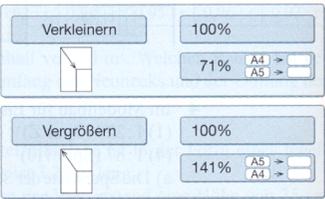
$$\Rightarrow l = \sqrt{2} \cdot b$$


Christoph Hammer 19

Realsituationen verstehen

### DIN-Format

Wissen Sie jetzt auch, warum auf der Vergrößerungstaste des Kopierers 141% (71%) steht?



$$\sqrt{2} \approx 1,414\dots; \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707\dots$$

Christoph Hammer 20

Realsituationen verstehen

## Würfeln – Modellbildung

- Nehmen Sie Ihre Würfel und werfen Sie alle 10 Würfel gemeinsam.
- Jeder Würfel, der eine 6 zeigt, scheidet aus.
- Sagen Sie mir, wie viele Würfel dann übrig sind.
- Wir werfen gemeinsam die übrigen Würfel.
- Jeder Würfel, der eine 6 zeigt, scheidet aus.
- Das wiederholen wir sechs Mal.



GEOGEBRA

Christoph Hammer

21

Realsituationen verstehen

## Parallele zum radioaktiven Zerfall

- Atomkerne zerfallen zufällig und scheiden dann für weitere Zerfälle aus – wie Würfel, die eine 6 zeigen.
- Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines (beliebigen) Kerns ist proportional zur Anzahl der vorhandenen (unzerfallenen) Kerne –  
wie beim Würfeln: hat man  $n$  Würfel, dann ist die Wahrscheinlichkeit für eine sechs:

$$\frac{n}{6}$$

Christoph Hammer

22