Aufgabe Fahrradschaltung

Christoph Hammer

11. November 2020

Vorbemerkung

Es geht hier um eine interessante realitätsnahe Aufgabenstellung, die unter anderem im Buch „Mathe für Eltern für Dummies“ (Hammer, Ch. (2020). Weinheim: Wiley-VCH) vorgestellt wird. Dort steht auch die Ankündigung, dass auf dieser Homepage eine Lösung präsentiert wird. Hier kommt sie.

Die Aufgabe

Wie viele unterscheidbare Gänge hat ein 21-Gang-Fahrrad mit Kettenschaltung?

Hinweise zur Lösung

- So eine Schaltung hat vorne bei den Pedalen drei Zahnräder (Kettenblätter) und am Hinterrad sieben Zahnräder (Ritzel). Typische Werte für die Zahnräder sind: vorne 22, 32, 42 und hinten 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28 Zähne.
- Bei einer Umdrehung der Kurbel wird das hintere Zahnrad um so viele Zähne weitergedreht, wie das vordere Kettenblatt Zähne hat.

Lösung

Der zweite Hinweis zeigt den Lösungsweg auf: Die Übersetzung des Fahrrads ergibt sich als Quotient aus den Zahnanzahlen der gewählten Kombination. Hat man z. B. die Kombination 32 Zähne vorne und 16 Zähne hinten gewählt, dreht sich das Rad bei *einer* Kurbeldrehung *zwei* Mal, weil $32 : 16 = 2$ ist. Je größer der Quotient aus den Zahnanzahlen ist, umso größer ist die so genannte „Entfaltung“, also die Strecke, die pro Kurbeldrehung zurückgelegt wird. Bei der Kombination 42 Zähne vorne (Kettenblatt) und 14 Zähne hinten (Ritzel) ergibt eine Kurbeldrehung drei Umdrehungen der Räder, man legt also deren dreifachen Umfang zurück.

Um die Frage zu beantworten, muss man daher die Quotienten der Zahnanzahlen vergleichen. Rechnungen dazu sind im nächsten Abschnitt angegeben.

Rechnungen

In folgender Tabelle sind alle Möglichkeiten für Zahnkranzkombinationen aufgeführt und die Quotienten berechnet. Die meisten Ergebnisse sind gerundet. Nach rechts sind die Anzahlen für die Kettenblätter und nach unten die für die Ritzel angegeben.

Anzahl Zähne	22	32	42
12	$\frac{22}{12} \approx 1,8$	$\frac{32}{12} \approx 2,7$	$\frac{42}{12} = 3,5$
14	$\frac{22}{14} \approx 1,6$	$\frac{32}{14} \approx 2,3$	$\frac{42}{14} = 3,0$
16	$\frac{22}{16} \approx 1,4$	$\frac{32}{16} = 2,0$	$\frac{42}{16} \approx 2,6$
18	$\frac{22}{18} \approx 1,2$	$\frac{32}{18} \approx 1,8$	$\frac{42}{18} \approx 2,3$
21	$\frac{22}{21} \approx 1,0$	$\frac{32}{21} \approx 1,5$	$\frac{42}{21} = 2,0$
24	$\frac{22}{24} \approx 0,9$	$\frac{32}{24} \approx 1,3$	$\frac{42}{24} \approx 1,8$
28	$\frac{22}{28} \approx 0,8$	$\frac{32}{28} \approx 1,1$	$\frac{42}{28} = 1,5$

Zwar ergibt sich rechnerisch nur eine exakte Übereinstimmung (32/16 und 42/21), aber bei sinnvoller Rundung finden sich mehrere kaum unterscheidbare Gänge. So sind etwa 22/12, 32/28 und 42/24, sowie 32/21 und 42/28, ebenso wie 32/14 und 42/18 sehr nahe beieinander. So bleiben von den 21 Kombinationsmöglichkeiten 16 unterscheidbare Gänge übrig.

Natürlich sollte man hier auch an das Problem denken, dass Extremkombinationen wegen stärkerem Verschleiß vermieden werden sollten, weshalb nicht alle rechnerisch möglichen Kombinationen tatsächlich nutzbar sind.